化工自动化及仪表，2007，34(5):29~32
Control and Instruments in Chemical Industry

# 采用双线性变换的线性离散系统模型降阶

杨　禹[1]，吴　俊[1]，熊　蓉[1]，徐巍华[1]，陈　生[2]

（1. 浙江大学 先进控制研究所 工业控制技术国家重点实验室，杭州 310027；
2. 南安普敦大学 电子与计算机学院，英国 南安普敦 SO17 1BJ）

**摘要：** 针对线性定常离散系统，提出一种新的不受稳定性限制的降阶方法，即利用双线性反变换，将离散系统转化为连续系统，利用已知的连续系统的降阶方法进行降阶，之后再经双线性变换为离散系统，得到了原离散系统的降阶模型，给出并证明了误差上界。数值算例说明了此方法的有效性。

**关键词：** 离散系统；双线性变换；模型降阶

**中图分类号：** TP13　**文献标识码：** A　**文章编号：** 1000-3932(2007)05-0029-04

## 1 引　言

在控制系统设计中，模型降阶特别是线性系统模型降阶一直是一项重大且富有意义的课题，经常出现在化工、航天领域，用于解决系统维数过大导致的成本和复杂性问题。从20世纪60年代末至今，产生过大量的降阶方法，如集结法、误差极小化法、Roth逼近法、Pade近似法[1]等，而在众多降阶方法中，最著名的是Moore提出的平衡降阶方法[2]，即求取系统的平衡实现，并对平衡实现进行阶数截断，可以得到一个降阶系统。

关于模型降阶的工作主要集中于连续系统，而离散系统的研究成果相对要少一些。Moore就是针对稳定连续系统提出平衡降阶方法的。以原系统与降阶系统之差的 $L_\infty$ 范数作为降阶误差，Moore还给出了其降阶方法的一个误差上界。Zhou[3]将Moore的思想在频域上进行推广，得到了无稳定性限制的连续系统平衡降阶方法，并导出了其降阶误差的一个上界。Al-Saggaf[4]提出了稳定离散系统平衡降阶方法，该方法的误差上界可由文献[5]得到。王勇[6]提出了无稳定性限制的离散系统降阶方法，但未能研究得到其误差上界。

众所周知，双线性变换作为沟通连续与离散的桥梁，提供了将连续域方法推广到离散域的途径。本文使用双线性变换将Zhou的降阶方法推广到离散系统，得到了一种无稳定性限制的离散系统降阶方法及其降阶误差上界。

## 2 连续系统降阶[3]

对于能控能观，且无虚轴极点的 $n$ 阶连续系统：

$$G_s(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + D_s \tag{1}$$

式中：$A_s \in \mathscr{R}^{n\times n}$；$B_s \in \mathscr{R}^{n\times p}$；$C_s \in \mathscr{R}^{q\times n}$；$D_s \in \mathscr{R}^{q\times p}$。给定 $0 < r < n$，按照文献[3]给出的模型降阶方法，可以获得式(1)的一个 $r$ 阶近似系统。

求解黎卡提方程：

$$XA_s + A_s^TX - XB_sB_s^TX = 0 \tag{2}$$

$$A_sY + YA_s^T - YC_s^TC_sY = 0 \tag{3}$$

得到半正定的 $X \in \mathscr{R}^{n\times n}$，$Y \in \mathscr{R}^{n\times n}$，构造并求解李亚普诺夫方程：

$$(A_s - B_sB_s^TX)P + P(A_s - B_sB_s^TX)^T + B_sB_s^T = 0 \tag{4}$$

$$Q(A_s - YC_s^TC_s) + (A_s - YC_s^TC_s)Q + C_s^TC_s = 0 \tag{5}$$

得到正定的 $P \in \mathscr{R}^{n\times n}$，$Q \in \mathscr{R}^{n\times n}$，计算 $P$ 和 $Q$ 的Cholesky分解：

$$P = L_cL_c^T \tag{6}$$

$$Q = L_oL_o^T \tag{7}$$

得到 $L_c \in \mathscr{R}^{n\times n}$，$L_o \in \mathscr{R}^{n\times n}$，对 $L_oL_c$ 进行奇异值分解：

$$L_oL_c = U\Lambda V^T \tag{8}$$

得到 $\Lambda \in \mathscr{R}^{n\times n}$，计算非奇异变换阵：

$$T = \Lambda^{-1/2}U^TL_o^T \in \mathscr{R}^{n\times n} \tag{9}$$

由此可得到 $G_s(s)$ 的平衡实现：

$(TA_sT^{-1}, TB_s, C_sT^{-1}, D_s)$

对平衡实现进行 $r$ 阶截断，即：

$$\hat{A}_s = [I_r \quad 0]TA_sT^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\hat{B}_s = [I_r \quad 0]TB_s \tag{11}$$

$$\hat{C}_s = C_sT^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

收稿日期：2007-05-24
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60374002，60421002）；国家“973”计划项目（2002CB312200）；教育部新世纪人才支持计划项目（NCET-04-0547）；英国皇家工程院资助项目

$$\hat{D}_s = D_s \qquad (13)$$

则系统：

$$\hat{G}_s(s) = \hat{C}_s(sI - \hat{A}_s)^{-1}\hat{B}_s + \hat{D}_s \qquad (14)$$

是式(1)的 $r$ 阶近似系统。

文献[3]已证明，由式(6)中的 $P$ 和式(9)中的 $T$ 所构成的 $TPT^{-1}$ 事实上是一个对角元素由大到小排列的正定的对角阵，即：

$$TPT^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}$$

$$(\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n > 0)$$

定义连续系统 $C(sI - A)^{-1}B + D$ 的 $L_\infty$ 范数为 $\|C(sI - A)^{-1}B + D\|_\infty = \sup_{\omega\in(-\infty,+\infty)} \bar{\sigma}[C(\mathrm{j}\omega I - A)^{-1}B + D]$，将原系统与近似系统差的 $L_\infty$ 范数 $\|G_s(s) - \hat{G}_s(s)\|_\infty$ 定义为降阶误差，文献[3]指出 $2(\sigma_{r+1} + \cdots + \sigma_n)$ 是上述降阶方法误差的一个上界，即：

$$\|G_s(s) - \hat{G}_s(s)\|_\infty \leqslant 2(\sigma_{r+1} + \cdots + \sigma_n) \qquad (15)$$

## 3 双线性变换

取系统采样周期 $h > 0$，且 $h$ 的选择不能破坏系统的能控性和能观性。

**引理 1**[5]

对于连续系统：

$$G_s(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + D_s$$

由双线性变换：

$$s = \frac{2z - 1}{hz + 1} \qquad (16)$$

可得到离散系统：

$$G_z(z) = C_z(zI - A_z)^{-1}B_z + D_z = G_s\left(\frac{2z - 1}{hz + 1}\right) \qquad (17)$$

式中：

$$A_z = -(hA_s - 2I)^{-1}(hA_s + 2I) \qquad (18)$$

$$B_z = 2(hA_s - 2I)^{-1}B_s\sqrt{h} \qquad (19)$$

$$C_z = 2C_s(hA_s - 2I)^{-1}\sqrt{h} \qquad (20)$$

$$D_z = D_s - C_s(hA_s - 2I)^{-1}B_s h \qquad (21)$$

由式(16)不难得到双线性反变换公式：

$$z = \frac{1 + hs/2}{1 - hs/2} \qquad (22)$$

离散系统：

$$G_z(z) = C_z(zI - A_z)^{-1}B_z + D_z$$

经双线性反变换后可得到连续系统：

$$G_s(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + D_s = G_z\left(\frac{1 + hs/2}{1 - hs/2}\right) \qquad (23)$$

式中：

$$A_s = \frac{2}{h}(A_z - I)(A_z + I)^{-1} \qquad (24)$$

$$B_s = \frac{2}{\sqrt{h}}(A_z + I)^{-1}B_z \qquad (25)$$

$$C_s = \frac{2}{\sqrt{h}}C_z(A_z + I)^{-1} \qquad (26)$$

$$D_s = D_z - C_z(A_z + I)^{-1}B_z \qquad (27)$$

式(24)～(27)显然与式(18)～(21)等价，定义离散系统 $C(zI - A)^{-1}B + D$ 的 $L_\infty$ 范数为 $\|C(zI - A)^{-1}B + D\|_\infty = \sup_{\theta\in(-\pi,+\pi)} \bar{\sigma}[C(e^{\mathrm{j}\theta}I - A)^{-1}B + D]$，下面的结果表明双线性变换及其反变换不改变 $L_\infty$ 范数。

**定理 1** $\|G_z(z)\|_\infty = \|G_s(s)\|_\infty$

**证明** 对于 $z = e^{\mathrm{j}\theta}, \theta \in (-\pi, +\pi)$，由式(16)可知：

$$\begin{aligned} s &= \frac{2}{h}\frac{e^{\mathrm{j}\theta} - 1}{e^{\mathrm{j}\theta} + 1} = \frac{2}{h}\frac{(\cos\theta - 1) + \mathrm{j}\sin\theta}{(\cos\theta + 1) + \mathrm{j}\sin\theta} \\ &= \frac{2}{h}\frac{[(\cos\theta - 1) + \mathrm{j}\sin\theta][(\cos\theta + 1) - \mathrm{j}\sin\theta]}{(\cos\theta + 1)^2 + \sin^2\theta} \\ &= \frac{2}{h}\frac{\mathrm{j}\sin\theta}{1 + \cos\theta} = \mathrm{j}\omega \end{aligned} \qquad (28)$$

其中 $\omega = \frac{2}{h}\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta} \in (-\infty, \infty)$。这意味着对任意 $\theta \in (-\pi, +\pi)$，存在 $\omega \in (-\infty, \infty)$，使得：

$$G_z(e^{\mathrm{j}\theta}) = G_s(\mathrm{j}\omega)$$

于是，$\|G_z(z)\|_\infty = \sup_{\theta\in(-\pi,+\pi)} \bar{\sigma}[G_z(e^{\mathrm{j}\theta})] \leqslant \sup_{\omega\in(-\infty,\infty)} \bar{\sigma}[G_s(\mathrm{j}\omega)] = \|G_s(s)\|_\infty$

**同理可证** $\|G_z(z)\|_\infty \geqslant \|G_s(s)\|_\infty$，综上即得：$\|G_z(z)\|_\infty = \|G_s(s)\|_\infty$。

## 4 离散系统降阶

对于能控能观且无单位圆周上极点的 $n$ 阶离散系统：

$$G_z(z) = C_z(zI - A_z)^{-1}B_z + D_z$$

给定 $0 < r < n$，本文提出如下步骤对 $G_z(z)$ 降阶。

第 1 步：对 $G_z(z)$ 进行双线性反变换，得到连续系统：

$$G_s(s) = C_s(sI - A_s)^{-1}B_s + D_s \qquad (29)$$

第 2 步：运用本文第 2 节的方法，对 $G_s(s)$ 降阶得到：

$$\hat{G}_s(s) = \hat{C}_s(sI - \hat{A}_s)^{-1}\hat{B}_s + \hat{D}_s \qquad (30)$$

第 3 步：对 $\hat{G}_s(s)$ 进行双线性变换得到 $\hat{G}_z(z)$，$\hat{G}_z(z)$ 即是 $G_z(z)$ 的 $r$ 阶近似系统。

**定理 2** $\|G_z(z) - \hat{G}_z(z)\|_\infty \leqslant 2(\sigma_{r+1} + \cdots + \sigma_n)$

**证明** 容易看到 $G_z(z)$ 和 $\hat{G}_z(z)$ 经双线性反变换分别得到 $G_s(s)$ 和 $\hat{G}_s(s)$，且 $G_s(s)$ 和 $\hat{G}_s(s)$ 经双线性

变换分别得到 $G_r(z)$ 和 $\hat{G}_z(z)$ 。于是, $G_z(z)-\hat{G}_z(z)$ 经双线性反变换可以得到 $G_s(s)-\hat{G}_s(s)$ ,而 $G_s(s)-\hat{G}_s(s)$ 经双线性变换可得到 $G_z(z)-\hat{G}_z(z)$ 。应用定理 1, $\|G_z(z)-\hat{G}_z(z)\|_\infty=\|G_s(s)-\hat{G}_s(s)\|_\infty$ 再由式(15)可知 $\|G_z(z)-\hat{G}_z(z)\|_\infty \leqslant 2(\sigma_{r+1}+\sigma_{r+2}+\cdots+\sigma_n)$ 。

下面我们将证明由上述降阶方法得到的误差上界及实际误差均与 $h$ 无关。令:

$$\tilde{A}=(A_z-I)(A_z+I)^{-1} \tag{31}$$

$$\tilde{B}=(A_z+I)^{-1}B_z \tag{32}$$

$$\tilde{C}=C_z(A_z+I)^{-1} \tag{33}$$

$$\tilde{D}=D_z-C_z(A_z+I)^{-1}B_z \tag{34}$$

对于算法第 1 步所得到的 $G_s(s)$ ,其黎卡提方程(2)可写成:

$$\frac{2}{h}X\tilde{A}+\left(\frac{2}{h}\tilde{A}\right)^TX-X\frac{2}{\sqrt{h}}\tilde{B}\left(\frac{2}{\sqrt{h}}\tilde{B}\right)^TX$$
$$=2X\tilde{A}+2\tilde{A}X-4X\tilde{B}\tilde{B}^TX=0 \tag{35}$$

这表明 $X$ 与 $h$ 无关。李亚普诺夫方程(4)可写成:

$$\left[\frac{2}{h}\tilde{A}-\frac{2}{\sqrt{h}}\tilde{B}\left(\frac{2}{\sqrt{h}}\tilde{B}\right)^TX\right]P+P\left[\frac{2}{h}\tilde{A}-\frac{2}{\sqrt{h}}\tilde{B}\left(\frac{2}{\sqrt{h}}\tilde{B}\right)^TX\right]^T$$
$$+B_sB_s^T=\left[(\tilde{A}-2\tilde{B}\tilde{B}^TX)P+P(\tilde{A}-2\tilde{B}\tilde{B}^TX)^T\right]=0 \tag{36}$$

因为 $X$ 与 $h$ 无关,所以 $P$ 与 $h$ 无关,同理 $Q$ 也与 $h$ 无关,且由 $P$ 和 $Q$ 得到的变换矩阵 $T$ 也与 $h$ 无关。这样 $TPT^{-1}$ 便与 $h$ 无关,于是误差上界 $2(\sigma_{r+1}+\cdots+\sigma_n)$ 与 $h$ 无关。

记:

$$A_r=[I_r\quad 0]T\tilde{A}T^{-1}\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix} \tag{37}$$

$$B_r=[I_r\quad 0]T\tilde{B} \tag{38}$$

$$C_r=\tilde{C}T^{-1}\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix} \tag{39}$$

$$D_r=D_z \tag{40}$$

它们均与 $h$ 无关,对于算法第 2 步所得到的 $\hat{G}_s(s)$ ,显然有:

$$\hat{A}_s=\frac{2}{h}A_r,\hat{B}_s=\frac{2}{\sqrt{h}}B_r,\hat{C}_s=\frac{2}{\sqrt{h}}C_r,\hat{D}_s=D_r,$$ 最后

对于算法第 3 步所得到的 $\hat{G}_z(z)$ ,其

$$A_z=-\left(h\frac{2}{h}A_r-2I\right)^{-1}\left(h\frac{2}{h}A_r+2I\right)$$
$$=-(A_r-I)^{-1}(A_r+I) \tag{41}$$

$$\hat{B}_z=2\left(h\frac{2}{h}A_r-I\right)^{-1}\frac{2}{\sqrt{h}}B_r\sqrt{h}=2(A_r-I)^{-1}B_r \tag{42}$$

$$\hat{C}_z=2\frac{2}{\sqrt{h}}C_r\left(h\frac{2}{h}A_r-2I\right)^{-1}\sqrt{h}=2C_r(A_r-I)^{-1} \tag{43}$$

$$\hat{D}_z=D_r-\frac{2}{\sqrt{h}}C_r\left(h\frac{2}{h}A_r-2I\right)^{-1}\frac{2}{\sqrt{h}}B_r$$



$$=D_r+2C_r(A_r-I)^{-1}B_r \tag{44}$$

它们与 $h$ 无任何关系,因此实际误差 $\|G_z(z)-\hat{G}_z(z)\|_\infty$ 与 $h$ 无关。

## 5　数值算例

一个不稳定的 6 阶线性离散系统 $G_z(z)$ ,其

$$A_z=\begin{bmatrix}0.5&2&0&0&0&0\\0&-0.7&1&0&0&0\\0&0&0.9&1&0&0\\0&0&0&1.2&1&0\\0&0&0&0&-1.4&2\\0&0&0&0&0&1.5\end{bmatrix};$$

$$B_z=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0.5\end{bmatrix};C_z=\begin{bmatrix}0.5\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}^T;D_z=1$$

进行双线性变换后得到:

$$A_s=\begin{bmatrix}-0.6667&17.7778&-9.3567&4.2531&10.6326&-8.5061\\0&-11.3333&7.0175&-3.1898&-7.9745&6.3796\\0&0&-0.1053&0.9569&2.3923&-1.9139\\0&0&0&0.1818&-4.5455&3.6364\\0&0&0&0&12&-8\\0&0&0&0&0&0.4\end{bmatrix}$$

;

$$B_s=\begin{bmatrix}2.1265\\-1.5949\\0.4785\\-0.9091\\2\\0.4\end{bmatrix};C_s=\begin{bmatrix}0.6667\\-4.4444\\2.3392\\-1.0633\\2.6582\\2.1265\end{bmatrix}^T;D_s=0.4684$$

取 $r=3$ ,运用本文第 2 节的方法,得到其 3 阶近似系统:

$$\hat{A}_s=\begin{bmatrix}-0.0852&0&0.0724\\0&0.1672&0\\-0.0724&0&-0.2351\end{bmatrix};$$

$\hat{B}_s=[-7.979\quad -1.485\quad -0.7192]^T$ ;

$\hat{C}_s=[0.8301\quad 2.6012\quad -4.3808]$ ; $\hat{D}_s=0.4684$

使用双线性变换后得到 $G_z(z)$ 的 3 阶近似模型:

$$\hat{A}_z=\begin{bmatrix}0.9161&0&0.0621\\0&1.1825&0\\-0.0621&0&0.7876\end{bmatrix};\quad \hat{B}_z=$$

$[-1.7439\quad -1.6352\quad -0.5870]^T$ ;　$\hat{C}_z=$

[ −1.743 9  −1.635 2  −0.587 0] ; $D_r$ = 0.599 0

表1列出按定理3求得的不同 $r$ 下的误差上界与实际降阶误差。

**表1 模型降阶实际误差及误差上界的对比**

| | $r=5$ | $r=4$ | $r=3$ | $r=2$ | $r=1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 误差上界 | 0.077 4 | 0.179 4 | 0.739 4 | 2.939 4 | 16.379 4 |
| 实际误差 | 0.077 3 | 0.127 6 | 0.685 4 | 1.767 3 | 14.059 5 |

从表1可以看出误差上界均高于实际误差，与理论分析吻合，系统在降为4阶时的误差上界不到0.18，表明本文方法降阶效果满意。

## 6 结 语

本文针对离散系统模型降阶问题进行了分析，通过双线性反变换将其转化为连续系统处理，提出了一个行之有效且易于编程实现的方法，并给出了误差的上界。数值例子证明了本方法优良的降阶性能。

**参考文献：**

[1] JAMSHIDI M. Large-scale Systems: Modeand Control[M]. New York: North-Holland, 1983.

[2] MOORE B C. Principle Component Analysis in Linear Systems [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1981, 26(1): 17-32.

[3] ZHOU K, SALOMON G, WU E. Balanced Realization and Model for Unstable Systems[J]. Int J Robust Nonlinear Contr, 1999, 9: 183-198.

[4] AL-SAGGAF U M, FRANKLIN G F. An Error Bound for a Discrete Reduced Order Model of a Linear Multivariable System [J]. IEEE Transaction on Automatic Control, 1987, 32(9): 815-819.

[5] ZHOU K, DOYLE J C, GLOVER K. Robust and Optimal Control[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

[6] 王 勇, 吴 俊. 线性离散系统平衡降阶理论及算法研究[D]. 浙江大学, 2005.

## Model Reducted-order of Linear Discrete Time Systems Based on Bilinear Transformation

YANG Yu[1], WU Jun[1], XIONG Rong[1], XU Wei-hua[1], CHEN Sheng[2]

(1. *National Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou* 310027, *China*;

2. *School of Electronics and Computer Science, University of Southampton, Southampton SO*17 1*BJ*, *UK*)

**Abstract**: To reduce the model order of discrete time LTI system, a new method without the limitation of stability was proposed. By using bilinear trsformation between discrete time systems and continuous time systems, a continuous time model order-reducted method was extended to discrete time systems. An upper bound of the model order-reducted error was given. Finally, a numerical example show the effectiveness of this method.

**Key words**: discrete time system; bilinear transformation; model reducted-order

(上接第28页)

[6] 项国波. ITAE最佳控制[M]. 北京: 机械工业出版社, 1986: 250-253.

[7] 王永初. 自动调节系统工程设计[M]. 北京: 机械工业出版社, 1983: 351-382.

## ITAE Control Research for the First Order System with Pure Dead Time Based on State Feed Back

GAN Yan-zhen, WANG Wei, ZHU Xue-feng,

(*College of Automatic Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou* 510641, *China*)

**Abstract**: A new control method based on state feedback of ITAE standardized transfer function and optimum setting formulae PID was presented for control design. An inner-loop state feedback matrix based on the best ITAE transfer function was structured using link of polynomial fitting pure time delay. In order to more approach practical situation, a full-dimensions state observer was also designed using the same way and the pole of the observer was configured with ITAE optimum transfer function. The frequency of the observer was 4-6 times higher than the state, so the object dynamic characteristics were improved. The outer-loop was controlled by the best ITAE setting formulae PID. The simulation shows that the new control algorithm has good performances with fast response, stability and robustness.

**Key words**: ITAE standard transfer function; polynomial approximation; time delay; state feedback; state observer