Proceedings of the 6th World Congress on Control
and Automation, June 21 - 23, 2006, Dalian, China

Approximation and Optimization of L_1-norm for Continuous-Time Linear Systems

Xiajiao Wang[1], Jun Wu[1], Weihua Xu[1], Sheng Chen[2], Xiaoliang Wang[3]

[1)]National Laboratory of Industrial Control Technology,
Institute of Advanced Process Control, Zhejiang University, Hangzhou 310027
(E-mail: xjwang@iipc.zju.edu.cn)
[2)]Department of Electronics and Computer Science,University of Southampton, Southampton, SO17 1BJ,UK
[3)] Department of Electronics, College of Information Science and Technology, Jinan University, Guangzhou 510630

***Abstract*—A method is derived to approximate the L_1-norm of continuous-time linear time-invariant systems. The optimization problem is then formulated to design fixed-order L_1-controller. The method of approach and Simulated Annealing Algorithm are utilized to solve the problem. Numerical examples illustrate the design procedure.**

***Keywords*—L_1–control, L_1–norm, continuous-time system, linear time-invariant system, fixed-order controller, Simulated Annealing Algorithm**

连续线性系统 L_1 范数的逼近计算与优化

王夏娇 [1]　吴俊 [1]　徐巍华 [1]　陈生 [2]　王小良 [3]

[1)]工业控制技术国家重点实验室 浙江大学先进控制研究所 杭州 310027

[2)]英国南安普敦大学电子与计算机学院 南安普敦 SO17 1BJ

[3)]暨南大学信息科学技术学院电子系 广州 510630

摘　要　本文推导出连续线性时不变系统 L_1 范数的逼近计算方法，提出了固定阶 L_1 控制器的优化设计问题，并针对该优化问题给出了基于逼近计算方法和模拟退火算法的求解策略。设计算例验证了方法的有效性。

关键词　L_1 控制，L_1 范数，连续时间系统，线性时不变系统，固定阶控制器，模拟退火算法

1．引言

80 年代以来，以 H_∞控制为代表的鲁棒控制理论取得了令人瞩目的发展。而 H_∞控制理论有其局限性：(1)它主要适用于输入和输出信号都是能量有界的系统；(2)它是频域的理论，尚不能可靠地保证闭环系统具有期望的跟踪、饱和约束等时域性能。这就促成了 L_1 控制理论（应用于连续时间系统）与 l_1 控制理论（应用于离散时间系统）的发展。L_1 和 l_1 控制理论与 H_∞理论有相同的范式，但有更广泛的适用性，可应用于输入和输出信号都是幅值有界（BIBO）的系统，并能保证对所有允许的具有参数不确定性的闭环系统都有所期望的时域性能[1]。

虽然 L_1 控制和 l_1 控制是被同时提出的，但它们的研究发展大相径庭。当前，l_1 控制已有了不少成熟的研究成果（见[1~3]及其参考文献），比如：给出了求解 l_1 问题的尺度 Q 法、FMV（Finitely Many Variables）法、FME（Finitely Many Equations）法、DA（Delay Augmentation）法、凸规划法等多种各具特色的逼近算法。文献[4]提出了离散线性时不变系统 l_1 范数的逼近计算方法，可以逼近计算 l_1 范数到任意给定的精度。

L_1 控制的研究成果概括如下。文献[5]研究了连续时间

本文工作得到国家自然科学基金（60374002、60421002）、973 计划（2002CB312200）、教育部新世纪人才支持计划（NCET-04-0547）和英国皇家工程院的资助

系统中最小化闭环传递函数 L_1 范数的问题，并针对 SISO 连续系统，给出了两种分别基于非线性规划和线性规划的 L_1 最优控制器的设计方法。文献[5]又指出：连续时间系统中，对于有理的被控对象，设计得到的 L_1 最优控制器往往是非有理的，其传递函数的分子和分母通常均含有时滞项 $e^{-\tau s}$。这一发现改变了 L_1 控制研究的走向，由于非有理的控制器在工程上非常不易实现，研究者们便把焦点转向了有理 L_1 控制器。文献[6~10]就“L_1 一块问题”，分别基于代数方法、离散欧拉逼近系统方法、LMI 方法和线性规划方法研究了用 $\sum_{i=0}^{N}\frac{c_i}{(Ts+1)^i}$ 形式的有理传递函数逼近（非有理）最优闭环传递函数。但是，这些有理 L_1 控制器的理论研究成果离实际应用仍然相距很远，因为只有在阶数相当高的情况下，由[6~10]方法得到的控制器的 L_1 指标才满足要求，而高阶控制器又不适合于工程实践。

考虑到现有 L_1 控制器设计方法导致控制器阶数过高的缺陷，本文拟针对连续线性时不变系统，研究固定阶 L_1 控制器优化设计问题。在该问题中，设计者可以根据具体情况事先给出一个工程上可以接受的控制器阶数。解固定阶 L_1 优化问题需要解决 L_1 范数的计算问题。本文受[4]的启发导出了一种关于给定传递函数的 L_1 范数的逼近计算方法。在此基础上，固定阶 L_1 优化问题可描述为一个对控制器参数寻优的问题。由于模拟退火算法[11]具有全局寻优能力强，实现方便等特点，被我们选择用于求解固定阶 L_1 优化问题。

本文后面的结构安排如下：第 2 节提出了连续传递函数的 L_1 范数的逼近计算方法。第 3 节先是给出了固定阶 L_1 控制器优化设计问题的数学描述，接着介绍基于模拟退火算法的 L_1 优化问题的求解策略。第 4 节是设计算例。最后在第 5 节简要地总结了论文的工作。

2．L_1 范数的逼近计算

2.1 SISO 情形

考虑一个渐近稳定的 SISO 连续线性时不变系统。记系统的传递函数为 $H(s)$，系统的单位脉冲响应为 $h(t)$。$H(s)$ 的 L_1 范数定义为：

$$\|H(s)\|_1 = \int_0^{\infty} |h(t)| dt \tag{1}$$

上式中的∞会给计算造成困难，所以 L_1 范数不能直接用式(1)来计算。现有的计算方法为：取一个足够大的正数 N，通过计算下式：

$$S_N = \int_0^{N} |h(t)| dt \tag{2}$$

的值来代替 $\|H(s)\|_1$。由于 $h(t)$收敛，足够大的 N 意味着误差

$$\Delta_N = \|H(s)\|_1 - S_N = \int_N^{\infty} |h(t)| dt \tag{3}$$

很小。该方法有一大缺点：不易确定 N 的值。因为即使 N 的值很大，其 Δ_N 有时仍然达不到所要求的精度。

这里，本文将导出一种求取 $\|H(s)\|_1$ 的逼近计算方法。其思路为：对给定的精度 $\varepsilon > 0$，求取 $N > 0$，使满足 $\Delta_N < \varepsilon$，从而克服现有 L_1 范数计算方法的不足。

系统的传递函数 $H(s)$可表示如下：

$$H(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} \tag{4}$$

其中，$b_0, b_1, \cdots, b_n \in \mathbf{R}, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbf{R}$。假设系统共有 q 个不同的极点：$p_1, p_2, \cdots, p_q \in \mathbf{C}$，重数分别为 $m_1, m_2, \cdots, m_q$，满足 $\sum_{j=1}^{q} m_j = n$。即

$$s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = (s - p_1)^{m_1} (s - p_2)^{m_2} \cdots (s - p_q)^{m_q} \tag{5}$$

则 $H(s)$的部分分式展开式为：

$$H(s) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{r_{jk}}{(s - p_j)^k} + b_n \tag{6}$$

其中，$r_{jk} \in \mathbf{C}$ 是关于极点 p_j 的第 k 个分式系数，b_n 为常数项。$H(s)$的单位脉冲响应是 $H(s)$的反拉普拉斯变换，即：

$$h(t) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{1}{(k-1)!} r_{jk} t^{k-1} e^{p_j t} + b_n \delta(t) \tag{7}$$

其中，$\delta(t)$ 为单位脉冲函数。记

$$h_{jk}(t) = \frac{1}{(k-1)!} r_{jk} t^{k-1} e^{p_j t} \in \mathbf{C} \tag{8}$$

则

$$h(t) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{m_j} h_{jk}(t) + b_n \delta(t) \tag{9}$$

为计算 Δ_N，以下给出定理 1。

定理 1： 设 α_j, β_j 分别为 p_j 的实部和虚部；$|r_{jk}|, \theta_{jk}$ 分别为 r_{jk} 的幅值和相角。即

$$p_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j \tag{10}$$

$$r_{jk} = |r_{jk}| e^{\mathrm{i}\theta_{jk}} \tag{11}$$

令

$$g_{jk}(t) = \frac{1}{(k-1)!} |r_{jk}| t^{k-1} e^{\alpha_j t} \cos(\theta_{jk} + \beta_j t) \in \mathbf{R} \tag{12}$$

那么

$$h(t) = \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=1}^{m_j} g_{jk}(t) + b_n \delta(t) \tag{13}$$

证明：(i) 若 p_j 为复数极点，则必定存在另一个极点 $p_f = \alpha_j - \mathrm{i}\beta_j$ 是 p_j 的共轭复数。并且有 $m_f = m_j$，

$r_{fk}=\left|r_{jk}\right|e^{\mathrm{i}(-\theta_{jk})}$。则 $\forall k\in\{1,2,\cdots,m_j\}$，都有

$$
\begin{aligned}
h_{jk}(t)+h_{fk}(t)&=\frac{1}{(k-1)!}r_{jk}t^{k-1}e^{p_j t}+\frac{1}{(k-1)!}r_{fk}t^{k-1}e^{p_f t}\\
&=\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|e^{\mathrm{i}\theta_{jk}}t^{k-1}e^{(\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j)t}\\
&\quad+\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|e^{\mathrm{i}(-\theta_{jk})}t^{k-1}e^{(\alpha_j-\mathrm{i}\beta_j)t}\\
&=\frac{2}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|t^{k-1}e^{\alpha_j t}\cos(\theta_{jk}+\beta_j t)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

又因为

$$
\begin{aligned}
g_{fk}(t)&=\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{fk}\right|t^{k-1}e^{\alpha_j t}\cos(-\theta_{jk}-\beta_j t)\\
&=\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|t^{k-1}e^{\alpha_j t}\cos(\theta_{jk}+\beta_j t)\\
&=g_{jk}(t)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

所以

$$h_{jk}(t)+h_{fk}(t)=g_{jk}(t)+g_{fk}(t) \tag{16}$$

（ii）若 p_j 为实数极点，则 $\beta_j=0$；r_{jk} 必定为实数，$\theta_{jk}=0$ 或 $\theta_{jk}=\pi$。可得：

$$
\begin{aligned}
h_{jk}(t)&=\frac{1}{(k-1)!}r_{jk}t^{k-1}e^{p_j t}\\
&=\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|e^{\mathrm{i}\theta_{jk}}t^{k-1}e^{\alpha_j t}\\
&=\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|t^{k-1}e^{\alpha_j t}\cos\theta_{jk}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

显然，

$$h_{jk}(t)=g_{jk}(t) \tag{18}$$

综合（i）、（ii），可得：

$$h(t)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}h_{jk}(t)+b_n\delta(t)=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}g_{jk}(t)+b_n\delta(t)$$

证毕。

由定理 1 可知：

$$
\begin{aligned}
\Delta_N&=\int_N^\infty\left|\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}g_{jk}(t)+b_n\delta(t)\right|dt\\
&=\int_N^\infty\left|\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|t^{k-1}e^{\alpha_j t}\cos(\theta_{jk}+\beta_j t)\right|dt\\
&\le\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}\int_N^\infty\left|\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|t^{k-1}e^{\alpha_j t}\cos(\theta_{jk}+\beta_j t)\right|dt\\
&\le\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|\int_N^\infty t^{k-1}e^{\alpha_j t}dt
\end{aligned}
\tag{19}
$$

记(19)式中不等号右侧部分为 Q_N，即

$$Q_N=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|\int_N^\infty t^{k-1}e^{\alpha_j t}dt \tag{20}$$

Q_N 是 Δ_N 的一个上界，只要求得使 $Q_N<\varepsilon$ 的 N 值，则 Δ_N 必定小于 ε。令

$$W_{jk}=\int_N^\infty t^{k-1}e^{\alpha_j t}dt \tag{21}$$

其中，$j\in\{1,2,\cdots,q\}$，$k\in\{1,2,\cdots,m_j\}$，则

$$Q_N=\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{m_j}\frac{1}{(k-1)!}\left|r_{jk}\right|W_{jk} \tag{22}$$

为计算 Q_N 的值，以下给出定理 2。

定理 2： 对于渐近稳定系统，$p_j=\alpha_j+\mathrm{i}\beta_j$ 为任一极点，则

$$W_{j1}=-\frac{1}{\alpha_j}e^{\alpha_j N} \tag{23}$$

$$W_{jk}=-\frac{N^{k-1}}{\alpha_j}e^{\alpha_j N}-\frac{k-1}{\alpha_j}W_{j,k-1},\quad k=2,3,\cdots m_j \tag{24}$$

证明：对于渐近稳定系统，α_j 必为小于 0 的实数。

当 k=1 时，

$$
\begin{aligned}
W_{j1}&=\int_N^\infty e^{\alpha_j t}dt=\frac{1}{\alpha_j}e^{\alpha_j t}\Big|_N^\infty\\
&=-\frac{1}{\alpha_j}e^{\alpha_j N}
\end{aligned}
$$

当 $k\in\{2,3,\cdots,m_j\}$ 时，利用分部积分法，

$$
\begin{aligned}
W_{jk}&=\int_N^\infty t^{k-1}e^{\alpha_j t}dt=\int_N^\infty\frac{1}{\alpha_j}t^{k-1}d(e^{\alpha_j t})\\
&=\frac{t^{k-1}}{\alpha_j}e^{\alpha_j t}\Big|_N^\infty-\frac{k-1}{\alpha_j}\int_N^\infty t^{k-2}e^{\alpha_j t}dt\\
&=-\frac{N^{k-1}}{\alpha_j}e^{\alpha_j N}-\frac{k-1}{\alpha_j}W_{j,k-1}
\end{aligned}
$$

证毕。

基于上述理论成果，对于给定的和 ε 和 $H(s)$，有如下 $\|H(s)\|_1$ 逼近计算的步骤：

步骤 1：计算出 $H(s)$的部分分式展开式(6)中的 b_n 和各个 p_j、m_j 和 r_{jk} 的值（$j\in\{1,2,\cdots,q\};k\in\{1,2,\cdots,m_j\}$）。

步骤 2：设置一个步长 d>0，并置 N 的初值 N=N_0>0 。

步骤 3：利用式(22)、(23)和(24)，计算出 Q_N 。

步骤 4：若 $Q_N\ge\varepsilon$，则 N=N+d，转步骤 3；否则，进行下一步骤。

步骤 5：计算 $\int_0^N\left|h(t)\right|dt$，并以之作为$\|H(s)\|_1$ 的值。

2.2 MIMO 情形

考虑一个渐近稳定的 MIMO 连续线性时不变系统，它的传递函数阵 $H(s)$如下：

$$H(s)=\begin{bmatrix}H_{11}(s)&\cdots&H_{1n_2}(s)\\\vdots&\ddots&\vdots\\H_{n_1 1}(s)&\cdots&H_{n_1 n_2}(s)\end{bmatrix} \tag{25}$$

$H(s)$的第（i,j）个元素 $H_{ij}(s)$为第 i 个输出对第 j 个输入的传

递函数（$i=1,2,\cdots,n_1; j=1,2,\cdots,n_2$）。$H(s)$的单位脉冲响应阵为：

$$h(t)=\begin{bmatrix} h_{11}(t) & \dots & h_{1n_2}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n_1 1}(t) & \cdots & h_{n_1 n_2}(t) \end{bmatrix} \tag{26}$$

MIMO 的 $H(s)$的 L_1 范数定义为：

$$\|H(s)\|_1=\max_{1\le i\le n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\|H_{ij}(s)\|_1 \tag{27}$$

利用 2.1 中求 SISO 连续线性时不变系统的传递函数 L_1 范数的逼近计算方法，可求得正数 N_{ij}，使得$\|H_{ij}(s)\|_1$的近似值 $S_{ij}(N_{ij})=\int_0^{N_{ij}}|h_{ij}(t)|dt$ 相对于$\|H_{ij}(s)\|_1$的误差小于 ε/n_2。从而求得$\|H(s)\|_1$ 的满足给定精度 ε 的近似值 $\max\limits_{1\le i\le n_1}\sum\limits_{j=1}^{n_2}S_{ij}(N_{ij})$。

3．固定阶 L_1 控制器的优化设计

给定如下连续线性时不变的被控对象 $G(s)$：

$$\begin{aligned} \dot{x}_G(t)&=Ax_G(t)+B_1e(t)+B_2u(t) \\ z(t)&=C_1x_G(t)+D_{11}e(t)+D_{12}u(t) \\ y(t)&=C_2x_G(t)+D_{21}e(t)+D_{22}u(t) \end{aligned} \tag{28}$$

其中，$x_G(t)\in\mathbf{R}^{n_G}$ 为状态向量；$e(t)\in\mathbf{R}^{n_e}$ 和 $u(t)\in\mathbf{R}^{n_u}$ 分别为干扰和控制输入；$z(t)\in\mathbf{R}^{n_z}$ 和 $y(t)\in\mathbf{R}^{n_y}$ 分别为受控和量测输出。

给定控制器的阶数 $n_K\ge 0$，n_K 阶的控制器 $K(s)$的状态空间描述为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_K(t)&=A_Kx_K(t)+B_Ky(t) \\ u(t)&=C_Kx_K(t)+D_Ky(t) \end{aligned} \tag{29}$$

其中，$x_K(t)\in\mathbf{R}^{n_K}$ 为反馈控制器的状态向量。

令控制器集合

$$\begin{aligned}\Phi_{n_K}=\{&(A_K,B_K,C_K,D_K)\,|\,\det(I-D_{22}D_K)\ne 0,\text{并且}\\ &(A_K,B_K,C_K,D_K)\text{镇定 }G(s),\\ &A_K\in\mathbf{R}^{n_K\times n_K},B_K\in\mathbf{R}^{n_K\times n_y},C_K\in\mathbf{R}^{n_u\times n_K},D_K\in\mathbf{R}^{n_u\times n_y}\}\end{aligned}$$

对于被控对象 $G(s)$，假设其对应的 Φ_{n_K} 非空，则由 $G(s)$和 Φ_{n_K} 中的控制器所构成的闭环系统的状态空间描述为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix}\dot{x}_G(t)\\ \dot{x}_K(t)\end{bmatrix}&=A_c\begin{bmatrix}x_G(t)\\ x_K(t)\end{bmatrix}+B_ce(t) \\ z(t)&=C_c\begin{bmatrix}x_G(t)\\ x_K(t)\end{bmatrix}+D_ce(t) \end{aligned} \tag{30}$$

记 $E_L=(I-D_{22}D_K)^{-1}$，$F_L=(I-D_KD_{22})^{-1}$，则

$$A_c=\begin{bmatrix} A+B_2F_LD_KC_2 & B_2F_LC_K \\ B_KE_LC_2 & A_K+B_KE_LD_{22}C_K \end{bmatrix}$$

$$B_c=\begin{bmatrix} B_1+B_2F_LD_KD_{21} \\ B_KE_LD_{21} \end{bmatrix}$$

$$C_c=\begin{bmatrix} C_1+D_{12}F_LD_KC_2 & D_{12}F_LC_K \end{bmatrix}$$

$$D_c=\begin{bmatrix} D_{11}+D_{12}F_LD_KD_{21} \end{bmatrix}$$

在上述稳定的闭环系统中，从 e 到 z 的闭环传递函数为：

$$T_{ze}(s)=C_c(SI-A_c)^{-1}B_c+D_c \tag{31}$$

显然，对 Φ_{n_K} 中任一控制器，我们都可以采用节 2 的算法计算出其对应的$\|T_{ze}(s)\|_1$值，并且不同的控制器对应于不同的$\|T_{ze}(s)\|_1$值。固定阶 L_1 控制器优化设计的目标就是在 Φ_{n_K} 中找到使$\|T_{ze}(s)\|_1$值最小的(A_K，B_K，C_K，D_K)，因此固定阶 L_1 控制器优化设计问题的数学描述为：

$$\min_{(A_K,B_K,C_K,D_K)\in\Phi_{n_K}}\|T_{ze}(s)\|_1 \tag{32}$$

上述问题实质上是一个非线性和非凸的优化问题，甚至连$\|T_{ze}(s)\|_1$与(A_K，B_K，C_K，D_K)之间的隐式解析关系都没有。这类优化问题很适合采用诸如模拟退火算法[12]、遗传算法等全局数值优化算法来求解。

本文应用模拟退火算法来搜寻固定阶 L_1 最优控制器，其中$\|T_{ze}(s)\|_1$的计算由节 2 的算法实现。

4．设计算例

被控对象 $G(s)$为：

$$\begin{aligned} \dot{x}_G(t)&=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}x_G(t)+\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}e(t)+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}u(t) \\ z(t)&=\begin{bmatrix}1&0\end{bmatrix}x_G(t) \\ y(t)&=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}x_G(t) \end{aligned} \tag{33}$$

要求设计一个 3 阶的 L_1 控制器，使$\|T_{ze}(s)\|_1$最小。

基于节 2 算法和模拟退火算法编写 Matlab 程序，求解优化设计问题(32)。设置 L_1 范数的精度 $\varepsilon=10^{-4}$。初始控制器(A_{ini}，B_{ini}，C_{ini}，D_{ini})如下：

$$A_{ini}=\begin{bmatrix}-7/3&-1&1\\-1&-2/3&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}$$

$$B_{ini}=\begin{bmatrix}5/3\\-2/3\\1\end{bmatrix}$$

$$C_{ini}=\begin{bmatrix}-5/3&2/3&1\end{bmatrix}$$

$$D_{ini}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

其对应的$\|T_{ze}(s)\|_1$的值等于 2.7344。

运行 Matlab 程序求得 3 阶 L_1 最优控制器为：

$$A_{opt} = \begin{bmatrix} 23.5283 & 18.0758 & 99.5028 \\ -71.9998 & -37.4079 & 47.7167 \\ 44.0764 & -93.3688 & -73.6033 \end{bmatrix}$$

$$B_{opt} = \begin{bmatrix} -55.8944 \\ 30.7068 \\ -22.8018 \end{bmatrix}$$

$$C_{opt} = \begin{bmatrix} 74.9958 & 30.4733 & 72.4700 \end{bmatrix}$$

$$D_{opt} = \begin{bmatrix} -81.3996 \end{bmatrix}$$

其对应的$\|T_{ze}(s)\|_1$的值等于 0.0163，是初始值的 1/168，大大提高了闭环 L_1 性能。

5、结论

本文提出了连续线性时不变系统L_1范数的逼近计算方法。在此基础上，采用模拟退火算法，给出了连续线性时不变系统固定阶 L_1 控制器的优化设计方法。该方法能方便、有效地设计出给定阶次的有理的 L_1 最优控制器。

参考文献

[1] M.A. Dahleh and I.J. Diaz-bobillo, *Control of Uncertain Systems: A Linear Programming Approach*. New Jersey: Prentice-Hall,1995.

[2] M. Khammash, "A new approach to the solution of the l_1 control problem: the scaled-Q method," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 45, no.2, pp. 180-187, 2000.

[3] X. Qi, M.V. Salapaka, P.G. Voulgaris and M. Khammash, "Structured optimal and robust control with multiple criteria: a convex solution," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 49, no.10, pp. 1623-1640, 2004.

[4] V. Balakrishnan and S. Boyd, "On computing the worst-case peak gain of linear systems," *Systems and Control Letters*, vol. 19, pp. 265-269, 1992.

[5] M.A. Dahleh, J. Boyd, "L_1-optimal compensators for continuous-time systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 32, no.10, pp. 889-895, 1987.

[6] Y. Ohta, H Maeda and S. Kodama, "Rational approximation of L_1 optimal controllers for SISO systems," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 37, no.11, pp. 1683-1691, 1992.

[7] F. Blanchini, M. Sznaier and F. Blanchini, "Rational L_1 suboptimal compensators for continuous-time systems," in *Proc. Amer. Control Conf.*, 1993, pp. 635-639.

[8] Z. Wang, M. Sznaier and F. Blanchini, "Further results on rational approximations of L_1 optimal controllers," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 40, no. 3, pp. 552-557, 1995.

[9] X. Chen and J.T. Wen, "Rational L_1 compensators with $H\infty$ constraints," in *Proc*. 34th *IEEE Conf. Decision Contr.*, 1995, pp. 809-814.

[10] M.E. Halpern, "Rational suboptimal continuous-time controller," *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 45, no.9, pp. 1731-1734, 2000.

[11] 康立山, 谢云等. 非数值并行算法(第一册): 模拟退火算法. 北京: 科学出版社,1994.

[12] S. Chen and B.L. Luk, "Adaptive simulated annealing for optimization in signal processing applications," *Signal Process*, vol. 79, no.1, pp. 117-128, 1999.